# ESAME DI STATO
# DI LICEO SCIENTIFICO - SCIENTIFICO TECNOLOGICO
# 2012
# Corso Sperimentale – Progetto Brocca
# Tema di Fisica

## La prova

Il candidato svolga una relazione su uno solo dei seguenti due temi, a sua scelta, prestando particolare attenzione al corretto uso della terminologia scientifica, delle cifre significative e delle unità di misura nella presentazione dei risultati numerici.

### Primo tema

Con la storica memoria dal titolo "*Teoria della legge di distribuzione dell'energia dello spettro normale*" presentata all'Accademia delle Scienze di Berlino il 14 dicembre 1900, Max Planck introdusse il concetto di *quantizzazione dell'energia*, presentando una formula matematica che forniva risultati coerenti con i dati sperimentali ricavati dall'analisi dello spettro del *corpo nero*. Prendendo spunto dai risultati teorici di Planck, Einstein riuscì a spiegare il fenomeno dell'effetto fotoelettrico che appariva incomprensibile utilizzando la teoria elettromagnetica di Maxwell.

Il candidato spieghi:
a) che cosa s'intende per *corpo nero* e descriva sinteticamente le deduzioni teoriche di Planck;
b) la differenza tra la produzione e la propagazione di un'onda elettromagnetica secondo la teoria quantistica di Planck e la successiva ipotesi dei fotoni avanzata da Einstein;
c) il fenomeno dell'effetto fotoelettrico, come oggi lo conosciamo grazie ad Einstein, descrivendone almeno un'applicazione.

Risolva, infine, il seguente problema.
Sopra una lastra di metallo fotosensibile incide un'onda elettromagnetica con lunghezza d'onda $\lambda$= 200 nm e sugli elettroni estratti per effetto fotoelettrico agisce un campo magnetico caratterizzato da un vettore induzione magnetica di modulo $B = 25 \cdot 10^{-6}$ T, perpendicolare alla loro direzione di propagazione. Risentendo l'effetto del campo magnetico, gli elettroni si muovono su una traiettoria circolare con un raggio massimo di 20 cm.
Il candidato calcoli in eV il lavoro di estrazione da questo metallo ed esprima poi la sua opinione sulla possibilità di ottenere l'effetto fotoelettrico utilizzando con lo stesso metallo un'onda elettromagnetica con lunghezza d'onda $\lambda$ = 400 nm. Si trascurino gli effetti relativistici.

Si ricordano i seguenti valori:
Velocità della luce: $c = 2{,}998 \cdot 10^8$ m/s; Costante di Planck: $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J·s;
Massa a riposo dell'elettrone: $m_e = 9{,}108 \cdot 10^{-31}$ kg; Carica dell'elettrone: $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C.

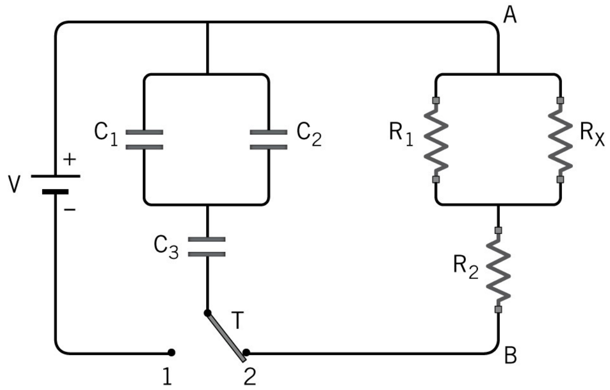
## Secondo tema

Il candidato, dopo aver spiegato il concetto di capacità elettrica e il funzionamento di un condensatore, ne descriva i processi di carica e di scarica attraverso un resistore trattando, in particolare, le relazioni matematiche che regolano tali processi e le trasformazioni energetiche in gioco.

Risolva poi il problema che segue.

Nel circuito riportato in figura l'interruttore $T$ può essere spostato nelle posizioni 1 e 2. Inizialmente $T$ si trova nella posizione 1 e il sistema costituito dai tre condensatori di capacità $C_1 = 10\,\mu$F, $C_2 = 14\,\mu$F e $C_3 = 8\,\mu$F è caricato da un generatore fino a raggiungere ai suoi capi la d.d.p. di 10 V. Successivamente, $T$ è spostato nella posizione 2 e i condensatori si scaricano attraverso i tre resistori $R_1$, $R_2$, e $R_x$.

Conoscendo i valori delle resistenze $R_1 = 3$ MΩ e $R_2 = 1$ MΩ, il candidato calcoli il valore di $R_x$ in modo che la differenza di potenziale $\Delta V_{AB}$ ai capi del sistema di resistori sia il 36,8% del suo valore massimo dopo 18 secondi dall'inizio del processo di scarica. Calcoli, inoltre, l'energia dissipata per effetto Joule dall'insieme dei tre resistori e, in particolare, quella dissipata dal resistore $R_x$.



# La soluzione

## Primo tema

### Il corpo nero

Questa è una domanda ricorrente nei temi dell'esame di Stato; per questa ragione si può riprendere quanto è stato scritto nella risoluzione relativa all'anno 2008.

In fisica si definisce *corpo nero* un corpo qualsiasi che abbia la proprietà di assorbire tutta la radiazione elettromagnetica incidente su esso, senza rifletterla. Un corpo nero è perciò anche in grado di emettere radiazione di tutte le lunghezze d'onda; la quantità $E$ di energia emessa in un intervallo di tempo $\Delta t$ da un corpo nero di area $S$, che si trova alla temperatura assoluta $T$, si calcola con la legge di Stefan–Boltzmann:

$$E = \sigma S T^4 \Delta t, \tag{1}$$

dove $\sigma$ è una costante universale, detta *costante di Stefan–Boltzmann*, che vale $5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W/(m^2 \cdot K^4)}$.

Vale la pena sottolineare che un corpo nero non deve affatto essere *nero*. Se si realizza una cavità con un piccolo foro, tale foro si comporta come un corpo nero. Anche il Sole è in questo senso un corpo nero.

Lo studio sperimentale dell'emissione termica del corpo nero, negli ultimi decenni dell'Ottocento, mise in evidenza che la potenza emessa dall'unità di area di un corpo nero a una data temperatura varia con la lunghezza d'onda secondo un andamento caratteristico, descritto dalla curva riprodotta nella figura (1).

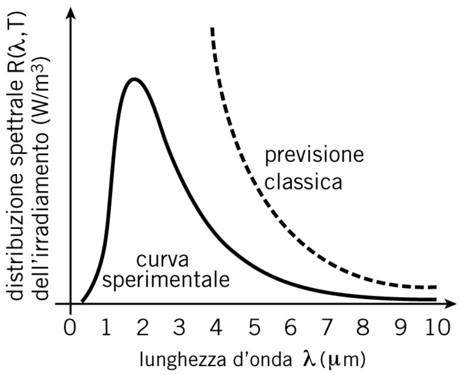



Figura 1: Curva di emissione del corpo nero, confrontata con la previsione teorica

L'ascissa del punto di massimo nella distribuzione della figura precedente varia con la temperatura $T$ seguendo la legge di spostamento di Wien, inizialmente enunciata come legge sperimentale e poi giustificata in base alla teoria quantistica della radiazione. Essa afferma che la temperatura $T$ di un corpo nero e la lunghezza d'onda $\lambda_{\max}$, corrispondente alla massima frazione di potenza emessa, sono inversamente proporzionali; si può scrivere:

$$b = \lambda_{\max} T \tag{2}$$

con $b = 2{,}898 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot K}$.

La curva (1) rappresentò un problema irrisolvibile per la fisica classica. Tutti gli sforzi per dedurre dall'elettromagnetismo di Maxwell un'espressione per la distribuzione della potenza conducevano infatti a un risultato inaccettabile: la potenza doveva aumentare senza limiti all'aumentare della frequenza. È facile capire che, se ciò fosse vero, la potenza totale emessa, cioè l'area sotto la curva, dovrebbe risultare infinita. In altri termini, un corpo nero dovrebbe emettere una quantità infinita di energia.

Alla fine dell'Ottocento, Planck affrontò questo problema e nel 1900 riuscì a dimostrare che era possibile ottenere un'espressione matematica in ottimo accordo con la curva sperimentale introducendo un'ipotesi supplementare, secondo cui gli scambi di energia $\Delta E$ fra la materia e la radiazione a una data frequenza $\nu$ non avvengono per quantità arbitrarie, variabili con continuità, ma soltanto per *quanti discreti*, multipli interi di un quanto di energia elettromagnetica di valore $h\nu$ secondo la formula

$$\Delta E = n h \nu. \tag{3}$$

La costante universale $h$ è detta *costante di Planck* e vale $(6{,}626\,069\,57 \pm 0{,}000\,000\,29)\ \mathrm{J \cdot s}$ secondo le misure più recenti al momento in cui scriviamo (giugno 2012).

### Confronto tra Planck ed Einstein

Max Planck non aveva ragioni per dubitare della correttezza dell'elettromagnetismo formalizzato da Maxwell; quindi, secondo la sua visione, la radiazione non è altro che un'onda elettromagnetica; essa viene prodotta secondo le equazioni di Maxwell da un sistema di cariche accelerate e si propaga nello spazio come un'onda trasversale.

La visione di Albert Einstein è radicalmente differente: egli propose che una radiazione di frequenza $\nu$ sia composta da quanti di energia, in seguito chiamati *fotoni*, ciascuno con un'energia $E$ data dalla formula

$$E = h\nu. \tag{4}$$

Un grande numero di fotoni si comporta collettivamente come un'onda, presentando in particolare i fenomeni della diffrazione e dell'interferenza. Ma un fotone può anche interagire singolarmente con la materia, come accade nell'effetto fotoelettrico (di cui si parla sotto) e nell'effetto Compton.

Il modello di Einstein giustifica l'ipotesi di Planck: infatti una radiazione composta di fotoni può scambiare con la materia solo un numero intero di essi; dalla (4) si riottiene così la relazione (3).

Visto che il testo della traccia parla della produzione delle onde elettromagnetiche, possiamo qui ricordare che un meccanismo per l'emissione dei fotoni è previsto dalla teoria quantistica (dal modello di Bohr in poi): un fotone è emesso da un sistema quantistico quando un elettrone passa da uno stato di energia maggiore a uno di energia minore. La frequenza del fotone prodotto è determinata, secondo la formula (4), dalla differenza tra le energie dei due stati coinvolti nella transizione.

### L'effetto fotoelettrico

Nel redigere le risposte per questo quesito e i seguenti, abbiamo ripreso il testo della discussione delle prove d'esame relative agli anni 1997, 2000 e 2006.

L'effetto fotoelettrico può essere messo in evidenza utilizzando un opportuno tubo a vuoto con due elettrodi connessi a una pila che mantiene fra essi una differenza di potenziale assegnata. Poiché i due elettrodi sono isolati, nel circuito così costituito non passa alcuna corrente. Ma se il catodo (l'elettrodo connesso al polo negativo della pila) è costituito da una piastrina metallica, è possibile far passare una corrente nel circuito illuminando il catodo con una sorgente di onde elettromagnetiche, visibili o ultraviolette. Finché la frequenza della radiazione impiegata è *inferiore* a un certo valore $\nu_0$, detto frequenza di soglia, nel circuito non si osserva alcuna corrente, qualunque sia l'irradiamento dovuto alla sorgente impiegata. La corrente passa soltanto se la radiazione ha una frequenza uguale o maggiore di $\nu_0$.

Dal punto di vista dell'elettromagnetismo classico, l'effetto fotoelettrico è sconcertante. Se nel circuito si stabilisce una corrente, possiamo ipotizzare che il catodo illuminato emetta elettroni, in maniera simile a quello che avviene nell'effetto termoionico. L'energia necessaria ad abbandonare il catodo, indicata dal lavoro di estrazione $W_e$, deve evidentemente essere fornita agli elettroni dalla radiazione incidente. Ma secondo l'elettromagnetismo classico l'energia della radiazione non dipende dalla lunghezza d'onda. Per la precisione, la densità di energia elettromagnetica in una zona dello spazio in cui è presente un campo elettromagnetico sinusoidale è direttamente proporzionale al quadrato del valore massimo del campo. In questa relazione non compaiono né la frequenza né la lunghezza d'onda dell'onda elettromagnetica in questione.

In altri termini, con una sorgente di radiazione abbastanza intensa e quindi in grado di generare un campo elettrico con un valore massimo sufficientemente grande, si dovrebbe osservare un passaggio di corrente per qualunque valore della lunghezza d'onda. L'esistenza di un effetto di soglia resta classicamente inspiegabile.

Come detto in precedenza, per risolvere questo problema Einstein propose un modello, basato sull'ipotesi che la luce abbia natura corpuscolare e sia costituita da quanti di luce che oggi chiamiamo fotoni. Quando un fotone colpisce un elettrone nel metallo che costituisce il catodo, gli cede la propria energia $h\nu$, con $\nu$ pari alla frequenza della luce incidente. Se la frequenza del fotone è troppo bassa (ovvero, se la lunghezza d'onda è troppo alta), l'energia ceduta all'elettrone è inferiore al *lavoro di estrazione* $W_e$ che misura l'energia necessaria ad estrarre un elettrone, e l'elettrone resta confinato nel metallo: qui, negli urti con il reticolo cristallino, esso perde immediatamente l'energia acquistata. Se invece $\nu$ è uguale o superiore a una frequenza di soglia $\nu_0$ (ovvero, se $\lambda$ è uguale o inferiore a $\lambda_0 = c/\nu_0$) l'elettrone acquista un'energia almeno sufficiente a lasciare il metallo e a muoversi nel campo elettrico esterno stabilito dalla pila. La condizione che determina $\nu_0$ è allora semplicemente:

$$W_e = h\nu_0. \tag{5}$$

### Le leggi dell'effetto fotoelettrico

Per il principio di conservazione dell'energia, l'energia che l'elettrone possiede appena al di fuori del catodo deve essere uguale all'energia ceduta dal fotone, diminuita dell'energia $W_e$ necessaria ad abbandonare il metallo e, eventualmente, dell'ulteriore energia persa per collisioni con gli atomi del metallo. L'energia cinetica massima $K_{\max}$ che un elettrone possiede dopo essere sfuggito al metallo è quindi uguale a:

$$K_{\max} = h\nu - W_e. \tag{6}$$

Non appena l'elettrone è emesso dal catodo, esso viene accelerato dal campo elettrico imposto dalla pila fra gli elettrodi. Se la polarità del campo viene invertita, in modo che il catodo sia connesso al polo *positivo* della pila, la corrente nel circuito non va necessariamente a zero (*corrente inversa*), perché l'energia cinetica degli elettroni emessi può essere sufficiente a permettere all'elettrone di raggiungere l'elettrodo opposto. L'elettrone *risale* la d.d.p. $\Delta V$ grazie all'energia cinetica che possiede, e in questo modo tale energia cinetica si trasforma nell'energia potenziale $U = e \cdot \Delta V$. Se $\Delta V$ è abbastanza grande, l'energia cinetica dell'elettrone non è sufficiente a permettergli di raggiungere l'elettrodo opposto e la corrente nel circuito va a zero: la ddp $\Delta V_a = K_{\max}/e$ necessaria ad ottenere questo risultato è nota come *potenziale di arresto*.

### Un'applicazione dell'effetto fotoelettrico

L'effetto fotoelettrico è sfruttato in diversi dispositivi, fra cui le *cellule fotoelettriche* impiegate come interruttori sensibili alla luce nei circuiti che regolano l'apertura di cancelli automatici o il funzionamento di sistemi di allarme. Quando la radiazione che illumina il catodo viene intercettata da un oggetto di passaggio, la corrente nel circuito si interrompe. La variazione di corrente può essere utilizzata come segnale che attiva il servomeccanismo di apertura di un cancello oppure un sistema di allarme.

### Il problema

Dobbiamo premettere un'osservazione: il testo della prova prescrive che il candidato "presti particolare attenzione al corretto uso delle cifre significative nella presentazione dei risultati numerici." Tutto bene, se poi la prova stessa non fornisse la maggior parte dei dati con una sola cifra significativa. Il candidato sarebbe allora costretto a fare altrettanto, e i risultati perderebbero spesso significato. Non possiamo fare a meno di interrogarci sulla ragione di un modo di procedere così palesemente incoerente. Nel seguito indichiamo tutti i risultati con tre cifre significative.

Per un'onda elettromagnetica o un fotone che si propaga nel vuoto la relazione tra lunghezza d'onda $\lambda$ e la corrispondente frequenza $\nu$ è

$$\nu = \frac{c}{\lambda}; \tag{7}$$

quindi l'energia di un fotone di lunghezza d'onda nota $\lambda$ si esprime come:

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \tag{8}$$

dove $h$ è la costante di Planck. Ne consegue che fotoni con lunghezza d'onda $\lambda = 2{,}00 \times 10^{-7}$ m hanno energia

$$E = \frac{(6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}) \times (2{,}998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s})}{2{,}00 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}} = 9{,}93 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}. \tag{9}$$

Secondo le richieste del problema, la stessa energia si può esprimere come

$$E = \frac{9{,}93 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J/eV}} = 6{,}20\,\mathrm{eV}. \tag{10}$$

Ora esaminiamo il comportamento degli elettroni emessi per effetto fotoelettrico. Come dice il testo, essi entrano perpendicolarmente in un campo magnetico (uniforme), per cui descrivono almeno un arco di una traiettoria circolare di raggio

$$r = \frac{m_e v}{eB}, \tag{11}$$

dove $m_e$ è la massa dell'elettrone, $e$ il modulo della sua carica e $v$ è il valore della sua velocità. Come si vede dalla formula precedente, $r$ è direttamente proporzionale a $v$, per cui il raggio *massimo* delle traiettorie circolari rivela gli elettroni che sono emessi con la velocità massima $v_{\max}$.

Dalla formula (11) possiamo allora ricavare

$$v_{\max} = \frac{eBr_{\max}}{m_e} = \frac{(1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}) \times (2{,}50 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T}) \times (0{,}200\,\mathrm{m})}{9{,}108 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}} = 8{,}79 \cdot 10^{5}\,\mathrm{m/s}. \tag{12}$$

Siamo così in grado di calcolare l'energia cinetica massima $K_{\max}$ degli elettroni emessi dal metallo; il suo valore è:

$$K_{\max} = \frac{1}{2} m_e v_{\max}^2 = \frac{1}{2} \times (9{,}108 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}) \times \left(8{,}79 \cdot 10^{5}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 3{,}52 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}. \tag{13}$$

Questa energia si esprime anche come

$$K_{\max} = \frac{3{,}52 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J/eV}} = 2{,}20\,\mathrm{eV}. \tag{14}$$

Dalla precedente equazione (6) vediamo quindi che il lavoro di estrazione $W_e$ risulta

$$W_e = E - K_{\max} = 6{,}20\,\mathrm{eV} - 2{,}20\,\mathrm{eV} = 4{,}00\,\mathrm{eV} = (9{,}93 - 3{,}52) \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} = 6{,}41 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}. \tag{15}$$

Infine esaminiamo cosa accade se la stessa lastra di metallo fotosensibile è illuminata con luce di lunghezza d'onda $\lambda_1 = 4{,}00 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$: dalla formula (8) vediamo che l'energia $E_1$ di un fotone di tale lunghezza d'onda è:

$$E_1 = \frac{(6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}) \times (2{,}998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s})}{4{,}00 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}} = 4{,}97 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}. \tag{16}$$

Questo valore dell'energia è minore di quello del lavoro di estrazione $W_e = 6{,}41 \cdot 10^{-19}$ J e, quindi, con questa seconda radiazione luminosa l'effetto fotoelettrico non può avvenire.

### Secondo tema

#### Condensatore e capacità elettrica

Un condensatore è un dispositivo formato da due conduttori detti *armature*, isolati tra loro ma disposti in modo che tra essi possa avvenire il fenomeno dell'*induzione completa*, in cui la carica sul corpo indotto ha lo stesso modulo di quella presente sul corpo che provoca l'induzione elettrostatica.

Si dimostra che, in un simile sistema fisico, la differenza di potenziale $\Delta V$ tra le armature è direttamente proporzionale alla carica positiva $Q$ presente su una di esse. Ne risulta che il rapporto

$$C = \frac{Q}{\Delta V}, \tag{17}$$

chiamato *capacità elettrostatica* del condensatore (o, più semplicemente, *capacità*) è una quantità che non dipende dalle variabili elettriche presenti sul condensatore ma solo dalla sua forma, dalle sue dimensioni e dalle proprietà del materiale isolante in cui le armature sono immerse.

Delle molte proprietà dei condensatore elenchiamo qui, per brevità, solo quelle che saranno utili nella risoluzione dell'esercizio contenuto nel testo.

- Data una rete di due o più condensatori si chiama *capacità equivalente* della rete la capacità elettrostatica di un singolo condensatore che, sostituto all'intera rete, preleverebbe da un generatore la stessa carica che è prelevata nelle stesse condizioni dalla rete.
- Due condensatori connessi in modo da avere due terminali collegati tra loro e anche gli altri due collegati tra loro, si dicono collegati in *parallelo*; con questa connessione i due condensatori sono sottoposti alla stessa differenza di potenziale. Si dimostra, inoltre, che se $n$ condensatori sono collegati in parallelo, la capacità equivalente $C_{eq}$ del sistema è uguale alla somma delle capacità $C_i$ ($i = 1, \ldots, n$) dei singoli condensatori. In formule:
$$C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} C_i. \tag{18}$$
- Due condensatori connessi in modo da avere uno dei terminali del primo collegato a uno del secondo, si dicono collegati in *serie*; con questa connessione le cariche positive presenti sui due condensatori hanno lo stesso valore. Si dimostra, inoltre, che se $n$ condensatori sono collegati in serie, il reciproco della capacità equivalente $C_{eq}$ del sistema è uguale alla somma dei reciproci delle capacità $C_i$ ($i = 1, \ldots, n$) dei singoli condensatori. In formule:
$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}. \tag{19}$$
Nel caso particolare in cui i condensatori in serie siano due, dalla formula precedente si ricava la relazione
$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \tag{20}$$
- Un condensatore di capacità $C$, soggetto a una differenza di potenziale $\Delta V$ e con le armature elettrizzate con cariche di modulo $Q$ è in grado di accumulare un'energia $W_c$ data dalle formule
$$W_c = \frac{1}{2} Q\Delta V = \frac{1}{2} C\Delta V^2 = \frac{Q^2}{2C}. \tag{21}$$

#### Carica e scarica di un condensatore

Esaminiamo qui, come rischiesto dalla traccia, i processi di carica e scarica di un condensatore.

- **Processo di carica** Consideriamo un condensatore di capacità $C$ che viene caricato da un generatore ideale di tensione che mantiene una differenza di potenziale $V_0$; il circuito conduttore che collega il generatore al condensatore ha una resistenza complessiva $R$. Risolvendo l'equazione differenziale che descrive questo sistema si dimostra che (indicando con $t = 0$ s l'istante in cui ha inizio il processo) durante la carica del condensatore la carica $Q(t)$ presente sulla sua armatura positiva varia con la legge
$$Q(t) = CV_0 (1 - e^{-\frac{t}{RC}}). \tag{22}$$

Questa legge prevede che il condensatore abbia carica $Q(0) = 0$ C all'inizio del processo di carica e che esso arrivi per $t \to +\infty$ alla sua carica massima pari a $Q_0 = CV_0$.

L'intensità della corrente di carica del condensatore è data dalla derivata della formula precedente:

$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}. \tag{23}$$

Durante il processo di carica il generatore ideale compie un lavoro $W_G$, necessario per trasportare al suo interno la carica $Q_0$, dato dall'espressione

$$W_G = Q_0 V_0 = C V_0^2. \tag{24}$$

Alla fine del processo di carica il condensatore ha immagazzinato l'energia data dalle formule (21); con le notazioni qui introdotte si tratta dell'energia

$$W_c = \frac{1}{2} C V_0^2, \tag{25}$$

uguale alla metà del lavoro fatto dal generatore. Per la conservazione di energia, una uguale quantità di energia $W_R = W_c$ è dissipata per effetto Joule sui conduttori di connessione tra il generatore e il condensatore.

Vale la pena di notare che il valore di $W_R$ è del tutto indipendente da quello di $R$: attraverso le formule (22) e (23), il valore della resistenza determina la rapidità del processo di carica e quindi anche la rapidità con cui l'energia è dissipata, ma non ne stabilisce il valore complessivo.

- **Processo di scarica** Consideriamo ora un condensatore di capacità $C$, sottoposto a una differenza di potenziale $V_0$ e che, quindi, porta sull'armatura positiva una carica $Q_0 = CV_0$.

  Esso viene scaricato collegando i suoi terminali tra loro mediante un conduttore di resistenza complessiva $R$. Risolvendo una seconda equazione differenziale si dimostra che (indicando con $t = 0$ s l'istante in cui ha inizio il processo) durante la scarica del condensatore la carica $Q(t)$ presente sulla sua armatura positiva varia con la legge

$$Q(t) = CV_0 e^{-\frac{t}{RC}}. \tag{26}$$

  Essa prevede che il condensatore abbia carica $Q(0) = Q_0$ all'inizio del processo di scarica e che esso arrivi per $t \to +\infty$ alla carica finale pari a 0 C. Come conseguenza della formula precedente, la differenza di potenziale $V(t)$ tra le armature del condensatore è data dalla formula

$$V(t) = \frac{1}{C} Q(t) = \frac{1}{C} CV_0 e^{-\frac{t}{RC}} = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}. \tag{27}$$

  Ancora una volta l'intensità della corrente di scarica del condensatore è data dalla derivata della funzione $Q(t)$:

$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}. \tag{28}$$

  Durante il processo di scarica viene dissipata sulla resistenza $R$, per effetto Joule, tutta l'energia

$$W_R = W_c = \frac{1}{2} C V_0^2 \tag{29}$$

  che era immagazzinata nel condensatore. Ancora una volta, il valore di $W_R$ non dipende da $R$.

### Prima parte del problema: la rete di condensatori

Quando l'interruttore $T$ è sulla posizione 1, il generatore carica la rete formata dai tre condensatori di capacità $C_1$, $C_2$ e $C_3$.

Analizzando lo schema riportato nel testo vediamo che le capacità $C_1$ e $C_2$ sono in parallelo tra loro e, quindi, sono equivalenti a un'unica capacità $C_{12}$ pari a

$$C_{12} = C_1 + C_2 = (10{,}0 + 14{,}0)\,\mu\text{F} = 24{,}0\,\mu\text{F}. \tag{30}$$

In secondo luogo, la capacità $C_3$ è in serie a $C_{12}$. Per la formula (20), la capacità complessiva $C$ del sistema è data da

$$C = \frac{C_{12}C_3}{C_{12}+C_3} = \frac{(24{,}0\mu\text{F}) \times (8{,}00\mu\text{F})}{(32{,}0\mu\text{F})} = 6{,}00\mu\text{F}. \tag{31}$$

Ora possiamo fare ricorso alla seconda delle formule (21), con $\Delta V = 10{,}0\,\text{V}$ come indicato dal testo, e scopriamo che l'energia immagazzinata dalla rete di condensatori alla fine del processo di carica è:

$$W_c = \frac{1}{2}C\Delta V^2 = \frac{1}{2} \times (6{,}00 \cdot 10^{-6}\text{F}) \times (10{,}0\,\text{V})^2 = 3{,}00 \cdot 10^{-4}\text{J}. \tag{32}$$

**Seconda parte del problema: il valore di $R_x$**

Con l'interruttore $T$ posto nella posizione 2, il generatore di tensione viene escluso dal circuito e la rete di condensatori, che ha la capacità equivalente $C = 6{,}00\mu\text{F}$ calcolata in precedenza, si scarica attraverso il sistema di resistori posto nella parte destra dello schema.

Indicata con $V_0 = 10{,}0\,\text{V}$ la differenza di potenziale presente ai capi del condensatore equivalente all'inizio del processo di scarica, la traccia stabilisce che tale d.d.p. si riduce a $V = 0{,}368\,V_0$ all'istante $t = 18{,}0$ s, misurato a partire dall'inizio del processo. Così l'equazione (27) diviene

$$0{,}368\,V_0 = V_0\,e^{-\frac{t}{RC}}. \tag{33}$$

Abbiamo ottenuto così l'equazione esponenziale

$$0{,}368 = e^{-\frac{t}{RC}}, \tag{34}$$

che si risolve estraendo prima il logaritmo naturale di entrambi i membri:

$$-\frac{t}{RC} = \ln(0{,}368) = -1{,}00, \tag{35}$$

e poi ricavando l'incognita $R$ richiesta dalla traccia

$$R = \frac{t}{C} = \frac{18{,}0\,\text{s}}{6{,}00 \cdot 10^{-6}\,\text{F}} = 3{,}00 \cdot 10^{6}\,\Omega = 3{,}00\,\text{M}\Omega. \tag{36}$$

Le connessioni in serie e in parallelo di resistori sono geometricamente identiche a quelle di condensatori, ma le leggi che forniscono le resistenze equivalenti sono diverse da quelle relative ai condensatori equivalenti. Così il valore di $R$ appena calcolato è dato dalla somma di $R_2$ con il parallelo $R_{1x}$ tra $R_1$ e la resistenza incognita $R_x$.

Ne consegue che possiamo calcolare

$$R_{1x} = R - R_2 = (3{,}00 - 1{,}00)\,\text{M}\Omega = 2{,}00\,\text{M}\Omega. \tag{37}$$

A questo punto, per le due resistenza in parallelo è conveniente scrivere la relazione

$$\frac{1}{R_{1x}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_x}, \tag{38}$$

da cui si ricava

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{R_{1x}} - \frac{1}{R_1} = \frac{1}{2{,}00\,\text{M}\Omega} - \frac{1}{3{,}00\,\text{M}\Omega} = \frac{1}{6{,}00\,\text{M}\Omega}. \tag{39}$$

Abbiamo così trovato il valore richiesto

$$R_x = 6{,}00\,\text{M}\Omega. \tag{40}$$

### Terza parte del problema: l'energia dissipata

Come si è detto in precedenza, durante l'intera scarica del condensatore l'insieme dei tre resistori dissipa tutta l'energia

$$W_c = 3{,}00 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{J} \tag{41}$$

che era immagazzinata nella rete di condensatori. Per rispondere all'ultima domanda della traccia, ricordiamo che la potenza $P$ dissipata per effetto Joule da un conduttore di resistenza $R$, ai cui capi è posta una d.d.p. $\Delta V$ e che è attraversato da una corrente elettrica di intensità $i$ è data dalle formule

$$P = i\,\Delta V = R\,i^2 = \frac{\Delta V^2}{R}. \tag{42}$$

Consideriamo dapprima il collegamento tra le resistenze $R_2$ e $R_{1x}$ che, essendo poste in serie, sono attraversate dalla stessa corrente. Allora, per la seconda delle formule precedenti, la potenza $P_2$ dissipata su $R_2$ e la potenza $P_{1x}$ dissipata su $R_{1x}$ sono direttamente proporzionali alle rispettive resistenze.

Visto che $R_{1x}$ è il doppio di $R_2$, anche $P_{1x}$ è il doppio di $P_2$, e lo stesso vale per le energie dissipate. Così, $1{,}00 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{J}$ di energia sono dissipati su $R_2$ e $2{,}00 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{J}$ di energia sono dissipati su $R_{1x}$.

Ora, $R_1$ e $R_x$ sono collegati in parallelo e, di conseguenza, ai loro estremi è applicata la stessa d.d.p.; quindi, per la terza delle formule precedenti le potenze che esse erogano, e anche le energie dissipate su di esse, sono inversamente proporzionali alle rispettive resistenze.

Allora, visto che $R_x$ è il doppio di $R_1$, l'energia dissipata su $R_x$ è la metà di quella dissipata su $R_1$. Possiamo così affermare che l'energia $W_x$ dissipata su $R_x$ è un terzo di quella che compete a $R_{1x}$; otteniamo, quindi:

$$W_x = \frac{2{,}00 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{J}}{3} = 6{,}67 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{J}, \tag{43}$$

mentre il doppio di questa energia è dissipata su $R_1$.

### Calcolo alternativo dell'energia dissipata

In realtà il testo della traccia è ambiguo e non è chiarissimo se l'estensore richieda l'energia dissipata nell'intero processo di scarica (secondo l'interpretazione data nel calcolo precedente) o quella dissipata nell'intervallo di tempo tra $t$ = 0 s e $t$ = 18 s. In questo secondo caso occorre fare ricorso a un integrale definito.

Come punto di partenza partiamo ancora dalla considerazione che, visto che $R_{1x}$ è il doppio di $R_2$, anche la d.d.p. ai capi di $R_{1x}$ (e, quindi, ai capi di $R_x$) è il doppio di quella che esiste ai capi di $R_2$. Otteniamo quindi che differenza di potenziale $V_x$ ai capi di $R_x$ è uguale ai due terzi di quella applicata all'intero sistema di resistenze:

$$V_x(t) = \frac{2}{3}V(t) = \frac{2}{3}V_0\,e^{-\frac{t}{RC}}, \tag{44}$$

dove si è ricordata la formula (27).

Per la terza delle formule (42), la potenza $P_x$ dissipata su $R_x$ si può calcolare come

$$P_x(t) = \frac{V_x^2}{R_x} = \frac{4V_0^2}{9R_x}\,e^{-\frac{2t}{RC}}. \tag{45}$$

Allora l'energia $E_x(t_0)$ dissipata su $R_x$ tra l'istante $t_1$ = 0 s e l'istante $t_2 = t_0$ si calcola come

$$E_x(t_0) = \int_0^{t_0} P_x(t)\,dt = \int_0^{t_0} \frac{4V_0^2}{9R_x}\,e^{-\frac{2t}{RC}}\,dt = \frac{4V_0^2}{9R_x}\left[-\frac{RC}{2}\,e^{-\frac{2t}{RC}}\right]_0^{t_0} = \frac{2V_0^2RC}{9R_x}\left(1 - e^{-\frac{2t_0}{RC}}\right). \tag{46}$$

Nel limite di $t_0 \to +\infty$ si considera l'intera scarica del condensatore; in tal caso l'ultimo termine esponenziale nella formula precedente tende a 0 e si ottiene:

$$E_x(+\infty) = \frac{2V_0^2RC}{9R_x} = \frac{2 \times (10{,}0\,\mathrm{V})^2 \times (3{,}00 \cdot 10^6\,\Omega) \times (6{,}00 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F})}{9 \times (6{,}00 \cdot 10^6\,\Omega)} = 6{,}67 \times 10^{-5}\,\mathrm{J}. \tag{47}$$

Abbiamo così ritrovato, come controllo, il risultato già ottenuto nella precedente formula (43).

Ponendo invece $t_0$ = 18,0 s, dalla formula (43) otteniamo il risultato finale

$$E_x(18{,}0\,\mathrm{s}) = \frac{2V_0^2RC}{9R_x}\left(1-e^{-\frac{36{,}0\,\mathrm{s}}{RC}}\right) = (6{,}67\times10^{-5}\,\mathrm{J})\times\left(1-e^{-\frac{36{,}0\,\mathrm{s}}{(3{,}00\cdot10^{6}\,\Omega)\times(6{,}00\cdot10^{-6}\,\mathrm{F})}}\right) =$$

$$= (6{,}67\times10^{-5}\,\mathrm{J})\times\left(1-e^{-\frac{36{,}0\,\mathrm{s}}{18{,}0\,\mathrm{s}}}\right) = (6{,}67\times10^{-5}\,\mathrm{J})\times\left(1-e^{-2{,}00}\right) =$$

$$= (6{,}67\times10^{-5}\,\mathrm{J})\times(0{,}865) = 5{,}77\times10^{-5}\,\mathrm{J},$$

che fornisce, come si voleva, l'energia dissipata su $R_x$ tra l'inizio del processo di scarica e l'istante $t_2$ =18,0 s.